

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА РОССЕРА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ В ГАЗЛИФТНОМ ПРОЦЕССЕ\*

А.П. Гулиев<sup>1</sup>, Р.М. Тагиев<sup>1</sup>, З.А. Махмудова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет,  
Баку, Азербайджан

<sup>2</sup>Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности,  
Баку, Азербайджан  
e-mail: [tagiyev.reshad@gmail.com](mailto:tagiyev.reshad@gmail.com)

**Резюме.** Рассматриваются граничные задачи для двумерной системы гиперболических уравнений первого порядка, которые описывают движение газа и газожидкостной смеси (ГЖС) в кольцевом пространстве и подъемнике, соответственно, в газлифтном процессе при добыче нефти. Предполагается, что с конца кольцевого пространства к началу подъемника движение выполняется с помощью соответствующих импульсных систем, описывающих образование ГЖС. Поскольку общее движение описывается то системой дифференциальных, то разностных уравнений, целесообразно описывать ее системой разностных уравнений. Поэтому, используя равномерные сетки, строится модель Россера, где показывается, что возмущение, входящее в дискретную систему, определяется из соответствующих линейных систем алгебраических уравнений. Показывается, что в случае постоянных граничных данных, возмущения, входящие в модель Россера, отсутствуют, т.е. они являются нулевыми. Для данного случая получены аналитические представления решения, где при стремлении к нулю шагов дискретизации полученные результаты совпадают с аналогичными результатами, имеющиеся в непрерывном случае.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, равномерная сетка, газлифт, разностные уравнения, модель Россера, системы алгебраических уравнений.

**AMS Subject Classification:** 49J15, 49J35.

### 1. Введение

Как известно [9,18,20], газлифтный способ является одним из основных этапов при добыче нефти, для которого разработаны разные математические модели [2,9], описывающие движение в газлифтном процессе. Далее, с их помощью ставятся разные задачи, например добыча максимального объема нефти с минимальной подачей газа [3,8], определение коэффициента гидравлического сопротивления и параметров образования ГЖС [1,11] и др.. Однако все эти задачи были решены для сосредоточенных

---

\* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 06.10.2015

дифференциальных уравнений, полученных из распределенных систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, описывающих пространственное движение газлифтного процесса с помощью разных модификаций методов осреднения [9,10,12]. Исходя из последнего, можно констатировать, что, в основном, эти исследования носят приближенный характер и более актуальными являются исследования самого исходного случая, где в [14,15] приведены их решения с помощью специальных бесконечных рядов, обеспечивающие приближенные решения с любой точностью. Однако, реализация таких методов на компьютере сталкивается с определенными трудностями [10]. Поэтому возникают вопросы, нельзя ли использовать разные разностные схемы, упростить процессы вычисления даже с определенной погрешностью? Исходя из этого, в данной работе делаются попытки использования разностных схем, заменяющих исходную непрерывную систему разностной моделью Россера [4]. Показывается, что с помощью разностных схем для определения параметров возмущений нужно решать соответствующие системы линейных алгебраических уравнений. На конкретном примере, когда граничные данные являются постоянными, получены аналитические выражения для решений систем разностных уравнений Россера, которые при стремлении к нулю шагов дискретизации совпадают с точным решением, имеющимся в непрерывном случае [7], что показывает адекватность модели Россера. Надо отметить, что здесь, в рассматриваемой модели Россера, система линейных неоднородных разностных уравнений является с переменными коэффициентами [17], и для ее решения требуется разработка разных методов, например исследованных в [13].

## 2. Постановка задачи

Пусть имеется система гиперболических уравнений, описывающих движение процесса газлифта [6].

$$\begin{cases} -F \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + 2aQ(x,t), \\ -F \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}, \end{cases} \quad x \in (0,l), t \in (-\infty; +\infty), \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} P(0,t) = P_0(t), \\ Q(0,t) = Q_0(t), \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

где  $F, a, c$ , и  $l$ , положительные постоянные числа, а  $P_0(t)$  и  $Q_0(t)$  заданные вещественные значения гладких функции,  $P(x, t)$  и  $Q(x, t)$  неизвестные, подлежащие определению.

$$\begin{cases} P(0, t) = \alpha_1 e^{\beta_1 t}, \\ Q(0, t) = \alpha_2 e^{\beta_2 t}, \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty). \quad (2)$$

Отметим, что при соответствующих выборах действительных чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  и  $\beta_2$  из (2) можно обеспечить все возможные начальные значения объема газа  $Q(x, t)$  и давление  $P(x, t)$ .

Используя результаты [7], имеем следующие представления в виде бесконечных рядов

$$\begin{cases} P(x, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} P_k(t) \Big|_{t=0} \frac{x^k}{k!} \\ Q(x, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_k(t) \Big|_{t=0} \frac{x^k}{k!} \end{cases} \quad (3)$$

где  $P_k(t)$ ,  $Q_k(t)$  определяются из соотношений

$$\begin{cases} P_{2k}(t) = \left( \frac{d}{dt} + 2a \right)^k \frac{P_0^{(k)}(t)}{c^k} \\ Q_{2k}(t) = \left( \frac{d}{dt} + 2a \right)^k \frac{Q_0^{(k)}(t)}{c^k} \end{cases} \quad k \geq 0$$

$$\begin{cases} P_{2k+1}(t) = - \left( -\frac{d}{dt} + 2a \right)^{k+1} \frac{Q_0^{(k)}(t)}{Fc^k} \\ Q_{2k+1}(t) = - \left( \frac{d}{dt} + 2a \right)^k \frac{FP_0^{(k+1)}(t)}{c^{k+1}} \end{cases} \quad k \geq 0$$

Непосредственное применение метода дискретизации для уравнения (1) не позволяет привести ее к компактному виду, например к дискретному уравнению Россера.

Поэтому имеет смысл найти такое преобразование, которое при ее использовании в (1), может привести к последнему.

### 3. Замена переменных для (1)

Теперь произведем следующую замену,

$$P(x, t) = R(x, t) + \varphi Q(x, t), \quad (4)$$

Отметим, что при помощи решения задач (1)-(2) начальные значения неизвестных  $P(x,t)$  и  $Q(x,t)$  определяются из представления [7] (см. формулу (4)), где она представлена в виде ряда неизвестных коэффициентов, которые определяются не из системы дифференциальных, а из алгебраических уравнений. Здесь  $R(x,t)$  новая неизвестная функция, заменяющая  $P(x,t)$ . Поскольку в каждое уравнение системы (1) входит производная различных функции  $P(x,t)$  и  $Q(x,t)$  по различным переменным  $x$  и  $t$ , то применение различных способов дискретизации для получения компактных моделей, например модели Россера [4,5] не увенчиваются успехом. Поэтому, имеет смысл использование преобразования (4), применив которое к системе (1), можно получить соответствующие модели Россера [5].

Таким образом, после применения преобразования (4) к системе уравнений (1) имеем

$$\begin{cases} -F \frac{\partial R}{\partial x} - \varphi F \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + 2aQ, \\ -F \frac{\partial R}{\partial t} - \varphi F \frac{\partial Q}{\partial t} = c \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases}$$

или же

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial x} = -\varphi \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{F} \left( -\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{c}{F} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial R}{\partial t} \right) - \frac{2a}{F} Q, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{\varphi} \frac{c}{F} \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases} \quad (5)$$

Принимая обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} &= W(x,t), \\ \frac{\partial R(x,t)}{\partial t} &= \chi(x,t). \end{aligned} \quad (6)$$

из системы уравнений (5) имеем [6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial R(x,t)}{\partial x} = \left( \frac{c}{\varphi F^2} - \varphi \right) W(x,t) + \frac{1}{\varphi F} \chi(x,t) - \frac{2a}{F} Q(x,t), \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\varphi} \chi(x,t) - \frac{c}{\varphi F} W(x,t). \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что после преобразования (4), (6), полученная система уравнений (7) уже позволяет после применения схемы какой-либо дискретизации построить модели Россера, но открытым остается определение введенных новых функций  $W(x,t)$  и  $\chi(x,t)$  [19].

Рассмотрим следующую равномерную сетку [17]

$$x_i = ih, i = \overline{0, N}, hN = l$$

$$t_j = j\tau, j = \overline{0, k}, k\tau = T.$$

Тогда, принимая обозначения

$$R(x_i, t_j) = R_i^j, Q(x_i, t_j) = Q_i^j, \quad (8)$$

задачу (6),(7) дискретизируем следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{R_{i+1}^j - R_i^j}{h} = \left( \frac{c}{\varphi F^2} - \varphi \right) W_i^j + \frac{1}{\varphi F} \chi_i^j - \frac{2a}{F} Q_i^j, \\ \frac{Q_i^{j+1} - Q_i^j}{\tau} = -\frac{1}{\varphi} \chi_i^j - \frac{c}{\varphi F} W_i^j. \end{cases} \quad i \geq 0, j \geq 0$$

$$\begin{cases} \frac{Q_{i+1}^j - Q_i^j}{h} = W_i^j, \\ \frac{R_i^{j+1} - R_i^j}{\tau} = \chi_i^j. \end{cases} \quad i \geq 0, j \geq 0$$

которая уже приводит к явной схеме:

$$\begin{cases} R_{i+1}^j = R_i^j + h \left( \frac{c}{\varphi F^2} - \varphi \right) W_i^j + \frac{h}{\varphi F} \chi_i^j - \frac{2ah}{F} Q_i^j, \\ Q_{i+1}^j = Q_i^j + h W_i^j, \\ R_i^{j+1} = R_i^j + \tau \chi_i^j, \\ Q_i^{j+1} = Q_i^j - \frac{\tau}{\varphi} \chi_i^j - \frac{c\tau}{\varphi F} W_i^j. \end{cases} \quad (9)$$

где  $\chi_i^j$  и  $W_i^j$  можно найти из [6], в следующем виде

$$\begin{cases} \chi_i^{j-1} = \frac{1}{\tau} (R_0^j - R_0^0) - \frac{2ahi}{F\tau} (Q_0^j - Q_0^0) + \frac{h}{\tau} \left( \frac{c}{\varphi F^2} - \varphi \right) \sum_{k=0}^{i-1} (W_k^j - W_k^0) + \\ + \frac{h}{\varphi F\tau} \sum_{k=0}^{i-1} (\chi_k^j - \chi_k^0) - \frac{2ah^2}{F\tau} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{k-1} (W_s^j - W_s^0) - \sum_{k=0}^{j-2} \chi_i^k \\ W_i^{j-1} = \frac{\varphi F}{c\tau} (Q_0^j - Q_0^0) - \frac{\varphi h F}{c\tau} \sum_{k=0}^{i-1} (W_k^j - W_k^0) - \frac{\varphi F}{c\tau} (R_0^j - R_0^0) + \frac{2ah\varphi i}{c\tau} (Q_0^j - Q_0^0) - \\ - \frac{\varphi F h}{c\tau} \left( \frac{c}{\varphi F^2} - \varphi \right) \sum_{k=0}^{i-1} (W_k^j - W_k^0) - \frac{h}{c\tau} \sum_{k=0}^{i-1} (\chi_k^j - \chi_k^0) + \frac{2a\varphi h^2}{c\tau} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{k-1} (W_s^j - W_s^0) - \sum_{k=0}^{j-2} W_i^k \end{cases} \quad (9')$$

Поскольку первое и четвертое уравнения системы (9) полностью описывают все точки области  $(t, x)$ , то можно (1) приближенно заменить следующим разностным уравнением

$$\begin{bmatrix} R_{i+1}^j \\ Q_i^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2ah}{F} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^j \\ Q_i^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\left(\frac{c}{\phi F^2} - \phi\right) & \frac{h}{\phi F} \\ -\frac{\tau}{\phi F} & -\frac{\tau}{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i^j \\ \chi_i^j \end{bmatrix} \quad (10)$$

Теперь используя обозначения из (8) для  $Q_i^{j+1}$ ,  $Q_i^j$  из (4) имеем

$$Q_i^{j+1} = -\frac{1}{\phi} R_i^{j+1} + \frac{1}{\phi} P_i^{j+1}, \quad Q_i^j = -\frac{1}{\phi} R_i^j + \frac{1}{\phi} P_i^j$$

Тогда уравнения (10) переходят к виду

$$\begin{bmatrix} R_{i+1}^j \\ P_i^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{2ah}{F}\right) & -\frac{2ah}{F} \\ \frac{2ah}{F} & -\frac{2ah}{F} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^j \\ P_i^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\left(\frac{c}{F^2} - 1\right) & \frac{h}{F} \\ h\left(\frac{c}{F^2} - 1\right) - \tau & \frac{h}{\tau} - \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i^j \\ \chi_i^j \end{bmatrix} \quad (11)$$

являющееся моделью Россера [16].

Исходя из этого отметим, что если в (11)  $i = l-1$ ,  $j = n$  то для  $i = l$ ,  $j = n-1$  получим

$$\begin{bmatrix} R_{l-0}^n \\ P_{l-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{2ah}{F}\right) & -\frac{2ah}{F} \\ \frac{2ah}{F} & -\frac{2ah}{F} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{l-1}^n \\ P_{l-1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\left(\frac{c}{F^2} - 1\right) & \frac{h}{F} \\ h\left(\frac{c}{F^2} - 1\right) - \tau & \frac{h}{\tau} - \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{l-1}^n \\ \chi_{l-1}^n \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} R_{l+1}^{n-1} \\ P_{l-0}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{2ah}{F}\right) & -\frac{2ah}{F} \\ \frac{2ah}{F} & -\frac{2ah}{F} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_l^{n-1} \\ P_l^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\left(\frac{c}{F^2} - 1\right) & \frac{h}{F} \\ h\left(\frac{c}{F^2} - 1\right) - \tau & \frac{h}{\tau} - \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_l^{n-1} \\ \chi_l^{n-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Из формулы (12) и (13), пользуясь величинами  $R_{l-0}^n$  и  $P_{l-0}^j$  соответственно, для условия пришивания в башмаке, т.е. для второго этапа процесса газлифта имеем.

$$R_{l+0}^n = F_{\delta}^1 R_{l-0}^n + \psi_1(R_{l-0}^n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$P_{l+0}^n = F_{\delta}^2 P_{l-0}^n + \psi_2(P_{l-0}^n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Таким образом, имеем следующий алгоритм вычисления для  $P_i^j$ ,  $Q_i^j$ . Отметим, что как показаны в [6,7] при краевых условиях (2) решение уравнение (1) имеет следующий вид.

$$\begin{cases} P(x,t) = \alpha_1 \cdot e^{\beta_1 t} - \frac{\alpha_2(\beta_2 + 2a_1)}{F_1} e^{\beta_2 t} x + \frac{\alpha_1 \beta_1}{c_1} (\beta_1 + 2a_1) e^{\beta_1 t} \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha_2 \beta_2}{F_1 c_1} (\beta_2 + 2a_1)^2 e^{\beta_2 t} \frac{x^3}{6}, \\ Q(x,t) = \alpha_2 \cdot e^{\beta_2 t} - \frac{F_1}{c_1} \alpha_1 \beta_1 e^{\beta_1 t} x + \frac{\alpha_2 \beta_2}{c_1} (\beta_2 + 2a_1) e^{\beta_2 t} \frac{x^2}{2} - \frac{F_1 \alpha_1 \beta_1^2}{c_1^2} (\beta_1 + 2a_1) e^{\beta_1 t} \frac{x^3}{6}, \\ x \in [0, l], \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (14)$$

**Алгоритм.**

1. Из граничных условий  $P(0,t) = P_0(t)$ ,  $Q(0,t) = Q_0(t)$  параметры  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$  и  $\beta_2$  выбираются так, чтобы согласовывались с конкретными практическими данными.
2. Из (9') находятся неизвестные  $\chi_i^{j-1}, W_i^{j-1}$  ( $i = 1, n; j = 1, k$ ).
3. Выбрав шаги  $h = \frac{l}{n}$ ,  $\tau = \frac{T}{k}$ , по  $x$  и  $t$  соответственно, строим сетку  
 $x_i = ih, i = \overline{0, N}, hN = l$   
 $t_j = j\tau, j = \overline{0, k}, \tau k = T$ .
4. Решая алгебраическое уравнение (11) находятся  $R_{i+1}^j$  и  $P_i^{j+1}$ .
5. Из уравнения (4) находится  $Q_i^j = \frac{1}{\varphi} (P_i^j - R_i^j)$ .
6. Из уравнения (14) определяется  $P(x_i, t_j)$  и  $Q(x_i, t_j)$ , где  $x_i = ih, t_j = j\tau$ .
7. Оценивается по  $h$  и  $\tau$

$$\frac{\|P(x_i, t_j) - P_i^j\|}{\|P_i^j\|}, \frac{\|Q(x_i, t_j) - Q_i^j\|}{\|Q_i^j\|}.$$

**Пример.**

Рассмотрим конкретный практический случай [14], т.е. примем параметры в следующем виде:

$$l = 1485m, c = 331m/c, \rho = 0.717kq/m^3, d = 1.05 \cdot 10^{-3}m, \lambda = 0.01$$

при  $0 < x < l$ ;

$$c = 850m/c, \rho = 700kq/m^3, d = 0.073m, \lambda = 0.23$$

при  $l < x < 2l$ ;

Полученные результаты иллюстрируем на конкретных практических данных. Сейчас остановимся на оценке погрешности решения уравнения (14) и модели Россера (11)-(13). После соответствующих вычислений имеем таблицу.

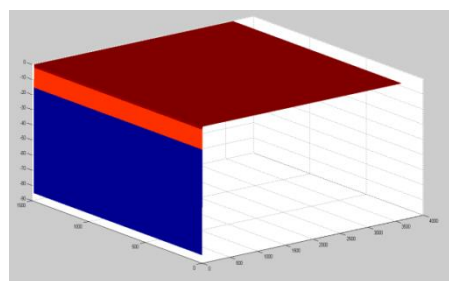
**Таблица 1.**

$h, \tau$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
$\frac{\ P(x_i, t_j) - P_i^j\ }{\ P_i^j\ }$	0.9876	0.4256	0.2159
$\frac{\ Q(x_i, t_j) - Q_i^j\ }{\ Q_i^j\ }$	0.3269	0.1246	0.0947

где показывается, что при уменьшении шагов  $h, \tau, P_i^j$  и  $Q_i^j$  стремятся к  $P(x_i, t_j)$  и  $Q(x_i, t_j)$  соответственно.

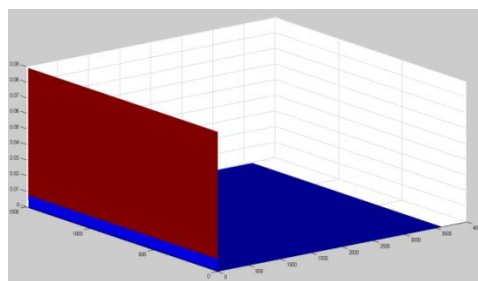
Как видно из таблицы при значениях  $h=10^{-1}, \tau=10^{-1}$  схема огрубляется, при значениях  $h=10^{-3}, \tau=10^{-3}, P_i^j, Q_i^j$  сходятся к  $P(x, t), Q(x, t)$  с определенной точностью. Приведем результаты вычислений на следующих фигурах.

$P(x, t)$



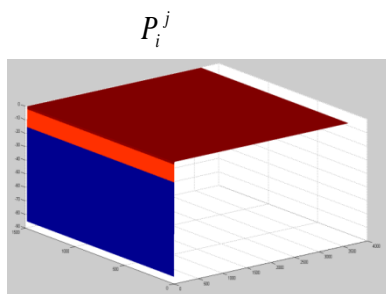
**Фиг. 1**

$Q(x, t)$

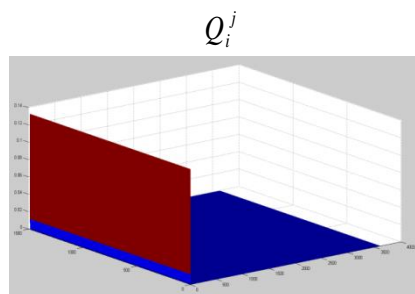


**Фиг. 2**





Фиг. 3



Фиг. 4

Отметим, что результаты [7], приведенные в *фиг.1,2* совпадают с точностью до  $10^{-1}$  с результатами, приведенные в настоящей работе.

#### 4. Заключение

Показывается, что поскольку добыча нефти газлифтным процессом описывается импульсными системами дифференциальных уравнений с частными производными (гиперболического типа), то удобно переходить к дискретному двумерному уравнению Россера. Далее, для решения соответствующей граничной задачи предлагается вычислительный алгоритм, показывающий, что при стремлении к нулю шагов интегрирования результаты исходной задачи совпадают. Такой подход позволяет решать более сложные задачи, например, когда в нескольких внутренних точках имеются разрывы

#### Литература

1. Aliev F.A., Ismailov N.A., Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl.Comput. Math., Vol.12, No.3, 2013, pp.306-313.
2. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova N.L., External solution of the problem of the choice of optimum modes for gaz-lift process, Appl.Comput. Math., Vol.11, No.3, pp.348-357.
3. Bily B., Linear Quadratic problem for Roesser model of 2-D systems, Foundations of Control Engineering, Vol.13, No.3, 1988, pp.103-111.
4. Roesser R., A discrete state space model for linear image processing, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.AC-20, No.1, 1975.
5. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Тагиев Р.М., Алгоритм построения модели россера для газлифтного процесса при добыче

- нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.3, No.2, 2014, с.173-184.
6. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Гулиев А. П., Ильясов М.Х., Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающих при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.2, 2013, с.113-136.
  7. Алиев Ф.А., Минимаксное решение задачи выбора оптимальных режимов газлифта, Доклады НАН Азерб., 2011, No.1, с.27-36.
  8. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А., Моделирование работы газлифтной скважины, Доклады НАН Азербайджана, No.2, 2008, с.107-115.
  9. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б., Задачи моделирования оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная механика, т. 46, No.6, 2010, с.113-122.
  10. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе, Доклады НАН Азерб., No.1, 2014, с.19-22.
  11. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах, Нелинейные колебания, т.17, No.2, 2014, с.151-159.
  12. Гайшун И.В., Многопараметрические системы управления, Наука и техника, 1996.
  13. Гулиев А.П., Ильясов М.Х., Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Алгоритм решения задачи определения движения пространственного газлифтного процесса, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.1, 2013, с.91-97.
  14. Гулиев А.П., Тагиев Р.М, Касымова К.Г., Вычислительный алгоритм для решения краевой задачи гиперболической системы возникающих в задачах газлифтного процесса, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.3, No.1, 2014, с.105-111.
  15. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Об одной задаче оптимального уравнения дискретными системами Россера, Известия НАН Азерб. 2014, Vol.34, №3, с.105-113.
  16. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Об одном представлении решения линейных разностных уравнений типа Россера, Известия НАН Азерб. 2013, Vol.33, №3, с.12-17.
  17. Мирзаджанзаде А.Х., Ахметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И. Технология и техника добычи нефти: Под редакцией акад. А.Х.Мирзаджанзаде. М., «Недра», 1986, 382 с.
  18. Самарский А.А.. Теория разностных схем, Москва, 1976.
  19. Шулов В.И., Технология и техника добычи нефти, Москва, Недра, 1983, 510с.

## **Qazlift prosesində neftin hərəkətini təsvir edən Rosser tipli diskret tənliyin həllinin tapılması üçün ədədi alqoritm**

**A.P. Quliyev, R.M. Tağıyev, Z.A. Mahmudova**

### **XÜLASƏ**

Həlqəvari fəzada və qaldırıcıda neft istehsalının qazlift prosesinə uyğun qaz və maye qaz qarışığının hərəkətini təsvir edən birinci tərtib ikiölçülü hiperbolik tənliklər sistemi üçün sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Fərz olunur ki, həlqəvari fəzanın sonundan qaldırıcının başlanğıcına qədər hərəkət uyğun impuls sisteminin köməyi ilə təsvir edilir. Ümumi hərəkət diferensial və ya fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunur, onu fərq tənliklər sistemi ilə yazmaq tövsiyyə olunur. Ona görə də müntəzəm fərq sxemindən istifadə edərək, Rosser modelini qurarkən, göstərilir ki, sistemə daxil olan həyacanlanma uyğun xətti cəbri tənliklər sistemindən təyin olunur. Göstərilir ki, Rosser modelinə daxil olan sabit sərhəd verilənləri halında həyacanlanma iştirak etmir. Verilən hal üçün həllin analitik təsviri alınmış, göstərilmişdir ki, bölgələrin uzunluğu sıfıra yaxınlaşdıqda alınan nəticələr kəsilməz haldakı nəticələrlə üst-üstə düşür.

**Açar sözlər:** hiperbolik tənliklər, müntəzəm şəbəkə, qaz-lift, fərq tənlikləri, Rosser modeli, cəbri tənliklər sistemi.

## **Numerical algorithm for finding a solution to discrete equation type Roesser, describing the movement of oil in the gas lift process.**

**A.P. Guliev, R.M. Tagiev, Z.A. Makhmudova**

### **ABSTRACT**

We consider boundary value problems for the two-dimensional system of first order hyperbolic equations, which describes the motion of the gas and liquid mixture (GLM) in the annular space and lift, respectively, in the process of gas-lift oil production. It is assumed that from the end of the annulus to the beginning of the lift the movement is performed by means of appropriate impulse systems, describes the formation of GLM. As the general motion is described by the system of differential and difference equations, advisable to describe it by the system of difference equations. Therefore, using the uniform grid the model of Roesser is constructed, where it is shown that the perturbation, included to the discrete system is determined from the corresponding systems of the linear algebraic equations. It is shown that in the case of constant boundary data the perturbation included in the model of Rosser, absent ie they are zero. For this case, the analytical representation of the solution are obtained, where at tends to zero of the steps of discretization, the obtained results are the same with the analogous results available in the continuous case.

**Keywords:** hyperbolic equation, uniform grid, gas lift, difference equations, model of Roesser, systems of algebraic equations.

